数理解析研究所講究録
567巻 1985年 12-18

Equivariant stable s-cobordism theorem

阪市大理　荒木捷朗　(Shôrô Araki)
阪大理　川久保勝夫　(Katsuo Kawakubo)

Gをコンパクト Lie 群，X を G-空間とする．X の同変 G-Whitehead 群 $Wh_G(X)$ の定義は Illman, 1974, によるものとする．G-空間の圏を G-Top と書くと，Wh_G は

$$Wh_G : G\text{-}Top \longrightarrow \mathcal{A}b$$

なる G-ホモトピー関手になっている．

$Wh_G(X)$ の構造の研究は，$Wh_G(X)$ をより単純なものの直和に分解し，更にそれをより簡単なものに reduce し，又，直和に分解し etc. の過程を経て最終的にはいくつかの代数的に定義された Whitehead 群の直和にあらわすこと (Illman, 1983) であるが，その過程を私流に解釈すると，第一段階は次の Hauschild (1983) の定理である．

定理 (Hauschild). X について自然な直和分解

$$Wh_G(X) = \coprod_{(H)} Wh_G(X,(H))$$

が成立つ．こゝで (H) は G の閉部分群のすべての共軛類を動き，

$Wh_G(X,(H))$ は，$Wh_G(X)$ の元 $[V,X]$ を代表する相対有限CW-複体 (V,X) が $V-X$ のすべての isotropy 型 $=(H)$ ととれるような元全体の作る部分群である．

その後のすべての過程の X についての naturality をチェックすることにより，次の定理が得られる．

定理1．$f:X\to Y$ が G-写像とし，H を G の閉部分群，X^H, Y^H が locally path-connected 且つ semi-locally 1-connected とし，$f^H: X^H \to Y^H$ が path-components の bijection を与え，且つ，各 path-component ごとに基本群の同型を与えるものとするとき，

$$f_*: Wh_G(X,(H)) \approx Wh_G(Y,(H)),\ \text{同型}.$$

この講究録中にのっている松本−塩田の最近の研究で，コンパクト Lie 群 G の作用するコンパクト G 多様体の G ホモトピー同値に対してその G-Whitehead torsion が定義出来ることが示された．

コンパクト smooth G 多様体の同変 h-コボルディズム $(W;X,Y)$ を考える．即ち $\partial W = X \amalg Y$ で包含 $i_X: X\subset W$, $i_Y: Y\subset W$ が G ホモトピー同値写像である．この $(W;X,Y)$ について次の2條件を考える．

$(*1)$ H, K が W の isotropy 群で $H \neq K$ のとき，$W^K = \coprod_\nu W^K{}_\nu$，$W^H = \coprod_\lambda W^H{}_\lambda$ を夫々連結成分への分解として，

$$W^K{}_\nu \supset W^H{}_\lambda \Rightarrow \dim W^K{}_\nu - \dim W^H{}_\lambda \geqq \dim G + 3.$$

(＊2) H が W の局大 isotropy 群のとき,
$$\dim W^K \geqq \dim G + 6 \quad (\text{すべての成分に対して}).$$

<u>定理2.</u> コンパクト smooth G 多様体の同変 G-h-コボルディズム $(W; X, Y)$ が, i) $\tau_G(W, X) = 0$, ii) 条件 (＊1), (＊2) をみたすとき,
$$(W, X) \approx (X\times I,\ X\times\{0\}),\quad G\text{-diffeo. rel } X.$$

これを一種の同変 s-cobordism theorem と呼んでよかろう. この証明には W の isotropy 型 (有限個) を $(H_1), \cdots, (H_r)$ とし, これを $(H_i) \geqq (H_j) \Rightarrow i \leq j$ となるように番号をつけておく. Corners をもつコンパクト G 多様体からなる filtration
$$W = W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_r$$
で, 各 W_i の isotropy 型全体 $= \{(H_i), (H_{i+1}), \cdots (H_r)\}$ となるものを次のように作る. 番号のつけ方より (H_1) は W の局大 isotropy 型であるから $W(H_1) = G\cdot W^{H_1}$ は W のコンパクト G 部分多様体になる. W に G-不変 R-metric を入れ, $\nu_1 \to W(H_1)$ を G-不変 normal bundle とし, これを G-不変管状近傍と同一視して, $W_2 = W - \mathring{\nu}_1(1)$ とおく. W_2 の isotropy 型全体 $= \{(H_2), \cdots, (H_r)\}$ となり (H_2) は W_2 の局大 isotropy 型になるから, 上と同様にして W_2 における $W_2(H_2) = G\cdot W_2^{H_2}$ の G-不変 normal bundle を $\nu_2 \to W_2(H_2)$ として, $W_3 = W_2 - \mathring{\nu}_2(1)$ とおく. 以下, この操作をくりかえして上の filtration

が得られる。作り方より

$$W = \nu_1(1) \cup \cdots \cup \nu_r(1).$$

$$W_i = \nu_i(1) \cup \cdots \cup \nu_r(1) \quad , 1 \le i \le r,$$

となっている。ここで $X_i = W_i \cap X$, $Y_i = W_i \cap Y$, $1 \le i \le r$,

とおく。

川久保, 1981, Lemma 3.1 より、この定理の仮定 ii) の下で(特に條件(*1))、各 (W_i, X_i, Y_i) は G-h-コボルディズムであり、又、同じ仮定の下で包含 $X_{i+1}^{H_j} \subset X_i^{H_j}$, $j \ge i+1$, が 2-連結になり、定理 1 が適用出来る。

inductive に $(W - W_i, X - X_i) \cong ((X - X_i) \times I, (X - X_i))$ を示して行くのであるが、第一段階をのべると

Illman より "$\tau_G(W, X) = 0 \Rightarrow \tau_G(W(H_1), \cancel{X}(H_1)) = 0$."

更に、同型: $Wh_G(X(H_1), (H_1)) \approx Wh_{WH}(X^{H_1}, \{1\})$ より

$$\tau_{WH_1}(W^{H_1}, X^{H_1}) = \tau_G(W(H_1), X(H_1)) = 0.$$

ここで W^{H_1}, X^{H_1} 上には WH_1 が free に作用するから

$$\tau(W^{H_1}/WH_1, X^{H_1}/WH_1) = 0 \quad (\text{Illman より}).$$

條件(*2) より $\dim(W^{H_1}/WH_1) \ge 6$.

よって古典的 s-cobordism 定理より

$$(W^{H_1}/WH_1, X^{H_1}/WH_1) \approx (X^{H_1}/WH_1 \times I, X^{H_1}/WH_1) \text{ diffeo.}$$

$W^{H_1} \to W^{H_1}/WH_1$ は principal WH_1-bundle で、その homotopy 性質より.

$$(W^{H_1}, X^{H_1}) \approx (X^{H_1}\times I,\ X^{H_1}) : WH_1\text{-diffeo.}$$

すると

$$(W^{(H_1)}, X(H_1)) \approx (X(H_1)\times I,\ X(H_1)) : G\text{-diffeo.}$$

すると、norml bundle ν_1 に対して、その homotopy 性質を用いて

$$(\nu_1,\ \nu_1|X(H_1)) \approx (\nu_1|X(H_1)\times I,\ \nu_1|X(H_1)).\ G\text{-diffeo.}$$

特に

$$(\nu_1(1),\ \nu_1(1)|X(H_1)) \approx (\nu_1(1)|X(H_1)\times I,\ \nu_1(1)|X(H_1)),$$

$$(S\nu_1(1),\ S\nu_1(1)|X(H_1)) \approx (S\nu_1(1)|X(H_1)\times I,\ S\nu_1(1)|X(H_1)).$$

となり、特に

$$\tau_G(\nu_1(1),\ \nu_1(1)|X(H_1)) = 0$$

$$\tau_G(S\nu_1(1),\ S\nu_1(1)|X(H_1)) = 0$$

となる。

すると、~~triple~~ triad の incl. $k : (X; X_2, \nu_1(1)|X(H_1)) \subset (W; W_2, \nu_1(1))$ に対して、G-Whitehead torsion の Meyer-Vietoris 性質を適用して、

$$\tau_G(W, X) = j_{1*}\tau_G(W_2, X_2) + j_{2*}\tau_G(\nu_1(1), \nu_1(1)|X(H_1))$$
$$- j_{0*}\tau_G(S\nu_1(1),\ S\nu_1(1)|X(H_1))$$

但し、$j_1 : X_2 \subset X$, $j_2 : \nu_1(1)|X(H_1) \subset X$, $j_0 : S\nu_1(1)|X(H_1) \subset X$.

特に

$$j_{1*}\tau_G(W_2, X_2) = 0.$$

X_2 の isotropy 型は $(H_2), \dots, (H_r)$ であるから、

$$Wh_G(X_2) \cong \coprod_{i=2}^{r} Wh_G(X_2(H_i))$$

と Hauschild 分解される この分解により

$$\tau_G(W_2, X_2) = \coprod_{i\geq 2}^{r} \tau_G(W_2, X_2)_{(H_i)}$$

と分解されたとせよ.

$X_2^{H_i} \subset X_1^{H_i}$, $i \geq 2$ が 2連結であったから, 定理1より

$$j_{1*}: Wh_G(X_2, (H_i)) \approx Wh_G(X, (H_i)). \ \text{同型}, \ i \geq 2.$$

一方, $j_{1*}\tau_G(W_2, X_2)_{(H_i)} = 0$ ($\tau_G(W, X) = 0$ の Hauschild 成分).

よって,

$$\tau_G(W_2, X_2)_{(H_i)} = 0, \quad 2 \leq i \leq r.$$

よって

$$\tau_G(W_2, X_2) = 0$$

となり, induction が進む.

この定理を induction で証明するには, 次の形にのべなおしておいた方がよい.

定理3. W を corner をもつコンパクト smooth G-多様体とし, $\partial W = X \amalg Y \amalg Z$, (W, X, Y), $(Z, \partial X, \partial Y)$ が G-h-コボルディズムで i) $\tau_G(W, X) = 0$, ii) (W, X, Y) は条件 (*1), (*2) をみたす. iii) $(Z, \partial X) \cong (\partial X \times I, \partial X)$, G-diffeo. rel. X, とする. このとき,

$$(W, X) \approx (X \times I, X \times \{0\}), \ \text{G-diffeo. rel. } X$$

で, この G-diffeo は iii) の G-diffeo を拡張したものになるものが存在する.

この形は、古典的には既に知られているものであり、この定理をWのisotropy型の数での induction で証明することにすると、定理2の証明の第一段階だけで isotropy 型の数を一つ減らすことが出来、証明が完了する。但し既に product になっている部分 $(Z, \partial X, \partial Y)$ と接する所にわずかな違いを生じ得るので、これを small G-isotopy で修正するという注意が必要になる。

<u>定理4.</u> (equivariant stable s-cobordism theorem).
$(W; X, Y)$ を G-h-コボルディズムとし、$\tau_G(W, X)=0$ とする。Gの表現空間 V で

$$(W\times V(1),\ X\times V(1)) \cong (X\times I\times V(1),\ X\times(0)\times V(1)),$$

G-diffeo. rel $X\times V(1)$, となるものが存在する。

仮定より どんな表現 V においても $\tau_G(W\times V(1), X\times V(1))=0$ となるが、V を適当に大きくとれば $(W\times V(1), X\times V(1), Y\times V(1))$ が定理2の條件 (*1), (*2) を満たすようにとれるから、上の定理が成立つ。條件 (*1), (*2) はかなり複雑なので、上のように equivariant s-cobordism theorem は stable には成立つ、とのべておいた方が事情をよく説明しているというべきかも知れない。

(以上)